第三章 論理数学

[**集合に関する基本概念**]

集合と要素: $x \in A$　x は集合 A の要素

外延的定義: $S = \{11, 13, 17, 19\}$
要素を列挙することにより集合を表現

内包的定義: $T = \{x \mid x \in Z$ かつ $x > 0\}$
要素の満たすべき条件を記述

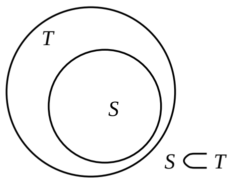
部分集合: $B \subseteq A$　すべての x について、$x \in B$ ならば $x \in A$ が成立

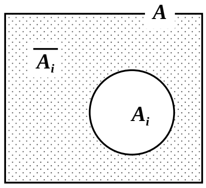
等価な集合: $A = B$　($A = B$ でなければ $A \neq B$)
$A \supseteq B$ かつ $A \subseteq B$ の時

真部分集合: $A \subset B$　$A \subseteq B$ かつ $A \neq B$

補集合: $\overline{A_i}$　(ある集合 A における)
A_i の要素以外から成る集合

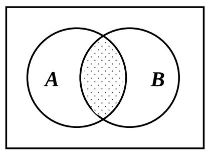
[**ベーン図表の例**]



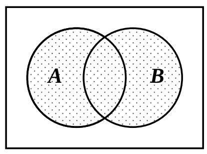


[**単項演算**]　一つの項 (集合) にのみ作用する演算 (例： 補集合)

[**２項演算**] 二つの項に対して演算
積集合 (**交わり**): $A \cap B$　**和集合** (**結び**): $A \cup B$



$A \cap B$



$A \cup B$

[**普遍集合**]
集合間の演算の母体となる集合

[**演算に関する法則**]

交換律:
$A \cup B = B \cup A$　　$A \cap B = B \cap A$

結合律:
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

分配律:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ド・モルガンの法則:
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

命題算

[**命題**] 真 (true) か偽 (false) かのみが問題となる文。

[**論理和**] $A \vee B$ 「A または B」

[**論理積**] $A \wedge B$ 「A でかつ B」

[**否定**] $\overline{A}$ 「A でない」

否定 NOT

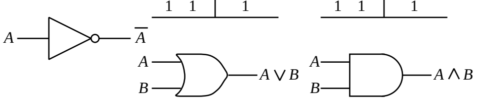
A	$\overline{A}$
0	1
1	0

論理和 OR

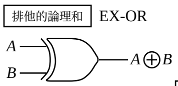
A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

論理積 AND

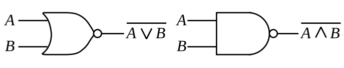
A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



排他的論理和 EX-OR



NOR　NAND



[**ブール代数**](スイッチング代数)
2 値 (1 か 0) を扱う代数

[**論理記号**]

	集合論	命題論理		本講義
論理積	$A \cap B$	$A \wedge B$	$A \cdot B$	$A \cdot B$ または AB
論理和	$A \cup B$	$A \vee B$	$A \vee B$	$A + B$
否定	$\overline{A}$ または $\sim A$	$\overline{A}$	$\overline{A}$	$\overline{A}$

[**ブール代数の公理**](各論理記号の定義)

1. すべての変数 A は、0か1の値を取る。

2. (a) $A \cdot 0 \ = \ 0 \cdot A \ = \ 0$

(b) $A + 1 \ = \ 1 + A \ = \ 1$

3. (a) $A \cdot 1 \ = \ 1 \cdot A \ = \ A$

(b) $A + 0 \ = \ 0 + A \ = \ A$

4. (a) $\overline{0} \ = \ 1$ (b) $\overline{1} \ = \ 0$

[**ブール代数の定理**](公理から導かれる等式)
教科書 36 ページ参照。

[**真理値表による定理の証明**]
各変数の 0, 1 のすべての組合せを代入して、
等式の左右の式が等しいかどうかチェック。

[**例**] $\overline{(A + B)} \ = \ \overline{A} \cdot \overline{B}$

A	B	$A+B$	$\overline{(A+B)}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

[**帰納法による証明の例**]

$\overline{(x_1 + x_2 + \cdots x_n)} \ = \ \overline{x_1}\,\overline{x_2} \cdots \overline{x_n}$

$n = 2$ の時は、上の例により成立。

n の時に成立すると仮定して、$n+1$ の時を考える。

ここで、$y = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\overline{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1})} \ &= \ \overline{(y + x_{n+1})} \\
&= \ \overline{y} \cdot \overline{x_{n+1}} \\
&= \ \overline{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \cdot \overline{x_{n+1}} \\
&= \ (\overline{x_1}\,\overline{x_2} \cdots \overline{x_n}) \cdot \overline{x_{n+1}} \\
&= \ \overline{x_1}\,\overline{x_2} \cdots \overline{x_n}\,\overline{x_{n+1}}
\end{aligned}$$

となり $n+1$ の時も成立。

[**定理** 11] 双対定理

$\overline{f(x_1, x_2, \cdots, x_n; +, \cdot)} \ = \ f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n}; \cdot, +)$

$\boxed{\text{定理11}}$

$\overline{(\ x + y\ ) \bullet (\ \overline{x} + z\ )} \qquad x$

等しい

$(\ \overline{x} \bullet \overline{y}\ ) + (\ \overline{\overline{x}} \bullet \overline{z}\ ) \qquad \overline{x}$

[**例**]

(a) $(x + y)(\overline{x} + z)$ の否定

$f(x, y, z) = (x + y)(\overline{x} + z)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\overline{f(x, y, z)} \ &= \ f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; \cdot +) \\
&= \ (\overline{x} \cdot \overline{y}) + (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{z}) \ = \ \overline{x}\,\overline{y} \ + \ x\,\overline{z}
\end{aligned}$$

(b) $(x + \overline{y}\,z)\overline{(xyz)}$ の否定

$f(x, y, z) = x + \overline{y}\,z$ とおくと、

$$\overline{(x + \overline{y}\,z)\overline{(xyz)}} \ = \ \overline{f(x, y, z)} + \overline{\overline{(xyz)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \ f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; \cdot, +) + xyz \ = \ \overline{x}(y + \overline{z}) + xyz \\
&= \ \overline{x}y + \overline{x}\,\overline{z} + xyz \ = \ \cdots \ = \ yz + \overline{x}\,\overline{z}
\end{aligned}$$

[**双対**]

$f^d(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})}$ を
$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の双対という。

[**自己双対**]

$f = f^d$ であるとき、f を自己双対であるという。

自己双対な関数では、

$f(x_1, \cdots, x_n; \cdot, +) = f(x_1, \cdots, x_n; +, \cdot)$ が成立。

[**例**]

$f(x_1, x_2, x_3) \ = \ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ は自己双対。理由は

$$\begin{aligned}
f^d(x_1, x_2, x_3) \ &= \ \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_3}\,\overline{x_1}} \\
&= \ \overline{(\overline{x_1}\,\overline{x_2})} \ \cdot \ \overline{(\overline{x_2}\,\overline{x_3})} \ \cdot \ \overline{(\overline{x_3}\,\overline{x_1})} \\
&= \ (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) \\
&= \ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_1 + x_2x_2x_3 + \cdots \\
&= \ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1
\end{aligned}$$

$(x_1 \bullet x_2) + (x_2 \bullet x_3) + (x_3 \bullet x_1)$

$(x_1 + x_2) \bullet (x_2 + x_3) \bullet (x_3 + x_1)$

自己双対の時、等しい

[**定理** 12]

$f(x_1,\cdots,x_n,0,1;+,\cdot) = g(x_1,\cdots,x_n,0,1;+,\cdot)$
ならば、
$f(x_1,\cdots,x_n,1,0;\cdot,+) = g(x_1,\cdots,x_n,1,0;\cdot,+)$
も成立。

[**例**]

$(x+\overline{y})y \;=\; xy$ が成立 $\Longrightarrow$
$x\overline{y}+y \;=\; x+y$ も成立。

$x+\overline{x} \;=\; 1$ が成立 $\Longrightarrow$ $x\overline{x} \;=\; 0$ も成立。

$\boxed{\text{定理12}}$

$(x + \overline{y}) \bullet y = x \bullet y \qquad x + \overline{x} = \mathbf{1}$

$(x \bullet \overline{y}) + y = x + y \qquad x \bullet \overline{x} = \mathbf{0}$

[**積の和形式**への変換]

(1) 定理の 6,7 などを使い、否定が変数のみにかかるようにする。

(2) 分配律などを使い、積の和形式にする。

[**和の積形式**への変換]

(1) 定理の 6,7 などを使い、否定が変数のみにかかるようにする。

(2) 分配律 (3(b)) などを使い、和の積形式にする。

[**例**]

$f(x_1,x_2,x_3) \;=\; (x_1+\overline{x_2})\overline{(\overline{x_1\overline{x_2}}+x_2\overline{x_3})}+\overline{x_1}x_2$

(a) 積の和形式に

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1+\overline{x_2})(x_1\overline{x_2}\cdot\overline{x_2\overline{x_3}})+\overline{x_1}x_2\\
&= (x_1+\overline{x_2})x_1\overline{x_2}(\overline{x_2}+x_3)+\overline{x_1}x_2\\
&= (x_1\overline{x_2}+x_1\overline{x_2})(\overline{x_2}+x_3)+\overline{x_1}x_2\\
&= x_1\overline{x_2}(\overline{x_2}+x_3)+\overline{x_1}x_2\\
&= x_1\overline{x_2}+x_1\overline{x_2}x_3+\overline{x_1}x_2\\
&= x_1\overline{x_2}(1+x_3)+\overline{x_1}x_2\\
&= x_1\overline{x_2}+\overline{x_1}x_2
\end{aligned}$$

(b) 和の積形式に

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= x_1\overline{x_2}+\overline{x_1}x_2\\
&= (x_1\overline{x_2}+\overline{x_1})(x_1\overline{x_2}+x_2)\\
&= (x_1+\overline{x_1})(\overline{x_2}+\overline{x_1})(x_1+x_2)\\
&\quad\;(\overline{x_2}+x_2)\\
&= (\overline{x_1}+\overline{x_2})(x_1+x_2)
\end{aligned}$$

中島・シャノンの展開式 (1)

[**定理** 13]

任意の $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ は以下の形に展開できる。

(a) $\overline{x_1}\cdot f(0,x_2,\cdots,x_n)+x_1\cdot f(1,x_2,\cdots,x_n)$

(b)

$(\overline{x_1}+f(1,x_2,\cdots,x_n))\cdot(x_1+f(0,x_2,\cdots,x_n))$

$\boxed{x_1 = 0 \text{ の時}}$

$$f(0,x_2,\cdots,x_n) = \underset{\overset{\|}{1}}{\overline{0}}\bullet f(0,x_2,\cdots,x_n) + \underbrace{0 \bullet f(1,x_2,\cdots,x_n)}_{0}$$

$\boxed{x_1 = 1 \text{ の時}}$

$$f(1,x_2,\cdots,x_n) = \underbrace{\overline{1}\bullet f(0,x_2,\cdots,x_n)}_{0} + 1 \bullet f(1,x_2,\cdots,x_n)$$

[**補足**]

x_1 以外の x_i の時も同様の展開が行える。

[**例**] $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3$ の x_3 についての展開

$$
\begin{aligned}
f &= x_3(\overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}\cdot\overline{1} + x_1\overline{x_2}\cdot 1) \\
&\quad + \overline{x_3}(\overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}\cdot\overline{0} + x_1\overline{x_2}\cdot 0) \\
&= x_3(\overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}) + \overline{x_3}(\overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}) \\
&= x_3(\overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}) + \overline{x_3}\cdot\overline{x_1}
\end{aligned}
$$

中島・シャノンの展開式 (2)

[**定理** 14]

任意の $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は以下の形に (一意に) 展開できる。

主加法標準展開:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\ \cdots\ \overline{x_n}\ f(0, 0, \cdots, 0) \\
&+\ \overline{x_1}\cdots\overline{x_{n-1}}x_n\, f(0, \cdots, 0, 1) \\
&+\ \cdots \\
&+\ x_1x_2\ \cdots\ x_n\ f(1, 1, \cdots, 1)
\end{aligned}
$$

主乗法標準展開:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= (\ \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ \cdots\ + \overline{x_n} \\
&\qquad + f(1, 1, \cdots, 1)\ ) \\
&\cdot\ (\ \overline{x_1} + \cdots + \overline{x_{n-1}} + x_n + \\
&\qquad f(1, \cdots, 1, 0)\ ) \\
&\cdot\ \ \cdots \\
&\cdot\ (\ x_1 + x_2 + \ \cdots\ + x_n \\
&\qquad + f(0, 0, \cdots, 0)\ )
\end{aligned}
$$

[**標準項**] 最小項もしくは最大項

[**最小項** (**基本積**)]

$x_1x_2\cdots x_n$, $\overline{x_1}x_2\cdots x_n$, $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\cdots\overline{x_n}$ など

[**主加法標準展開：**)] 最小項の和

[**最大項** (**基本和**)]

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $\overline{x_1} + x_2 + \cdots + x_n$, $\overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_n}$ など

[**主乗法標準展開：**)] 最大項の積

[**展開式の計算法**]

真理値表を作り、以下のようにする。

主加法標準展開:

$f(x_1, \cdots, x_n) = 1$ となる変数の組合せを最小項とする

($x_i = 0$ なら $\overline{x_i}$ とし、$x_i = 1$ なら x_i とする)

主乗法標準展開:

$f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ となる変数の組合せを最大項とする

($x_i = 0$ なら x_i とし、$x_i = 1$ なら $\overline{x_i}$ とする)

[**例**]

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 + \overline{x_2}x_3)} + \overline{\overline{x_1}x_2(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})}$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	最小項	最大項
0	0	0	1	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	
0	0	1	0		$x_1 + x_2 + \overline{x_3}$
0	1	0	1	$\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}$	
0	1	1	1	$\overline{x_1}\,x_2\,x_3$	
1	0	0	0		$\overline{x_1} + x_2 + x_3$
1	0	1	1	$x_1\,\overline{x_2}\,x_3$	
1	1	0	0		$\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3$
1	1	1	0		$\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}$

[**排他的論理和**] $A \oplus B$

$A \oplus B\ =\ A\overline{B} + \overline{A}B$

[**排他的論理和の性質**]

$0 \oplus 0\ =\ 1 \oplus 1\ =\ 0$

$0 \oplus 1\ =\ 1 \oplus 0\ =\ 1$

[**排他的論理和による展開**]

$a + b\ =\ a \oplus b \oplus ab$ という性質を用いると、

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ = \\
&\qquad f(0, x_2, \cdots, x_n)\ \oplus\ x_1\{f(0, x_2, \cdots, x_n) \\
&\qquad \oplus f(1, x_2, \cdots, x_n)\}
\end{aligned}
$$

と展開できる。

[**環和標準形**]

排他的論理和による展開を繰り返すことにより、任意の論理関数は以下の形式に一意に展開できる。

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= c_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i \\
&\oplus\ \sum_{i<k} c_{ik}\, x_ix_k\ \oplus \cdots \\
&\oplus\ c_{12\cdots n}\, x_1x_2\cdots x_n
\end{aligned}
$$

ただし、$c_{ik\cdots}$ は f に応じて一意に決まる 0 か 1 の定数。